เฉลยแนวข้อสอบ 206103 Final

By P'Tone

Line K_Tanwa

แบบฝึกหัดทบทวน

1. กำหนด $f(x) = \dfrac{1}{1+2x}$

   1.1 จงหาพหุนามแมคลอรินอันดับ 3 ของ $f(x)$

   1.2 จงหาค่าประมาณของ $\dfrac{1}{1.02}$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินอันดับ 2 ของ $f(x) = \dfrac{1}{1+2x}$

2. จงหาอินทิกรัลต่อไปนี้

3.1 $\displaystyle\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 3x^{\frac{1}{3}} - \frac{5}{x}\right) dx$

3.2 $\displaystyle\int \frac{\cos x \sin x}{\sin^2 x + 1}\, dx$

3.3 $\displaystyle\int (2x-1)^{2011}\, dx$

3.4 $\displaystyle\int e^x e^{e^x}\, dx$

3.5 $\displaystyle\int \operatorname{cosec} x(\cot x + \operatorname{cosec} x) dx$

3.6 $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+9e^{2x}}\, dx$

4. จงหา $\displaystyle\int \frac{\sin\theta\cos^8\theta}{1-\sin^2\theta}\, d\theta$

5. จงหา $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\, dx$

6. จงหา $\displaystyle\int \cos 3x \cos 5x\, dx$

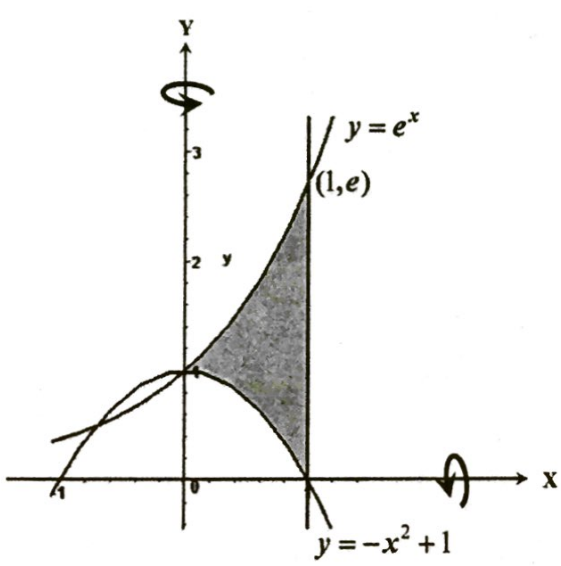
7. จงหา $\displaystyle\int x \operatorname{cosec}^2 x\, dx$

8. จงเขียนฟังก์ชันตรรกยะต่อไปนี้เป็นผลบวกของเศษส่วนย่อย <u>โดยไม่ต้องคำนวณค่าคงที่</u>

$$\frac{5x^2+1}{(x-2)^2(x^2+x+13)} = \text{...}$$

9. จงหา $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+2}{x(x^2+1)}\, dx$

10. กำหนดรูป



จากรูปจงหาปริมาตร (V) ที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่แรเงารอบเส้นตรงที่กำหนด โดยเขียนคำตอบในรูปอินทิกรัลจำกัดเขต <u>โดยไม่ต้องคำนวณค่า</u>

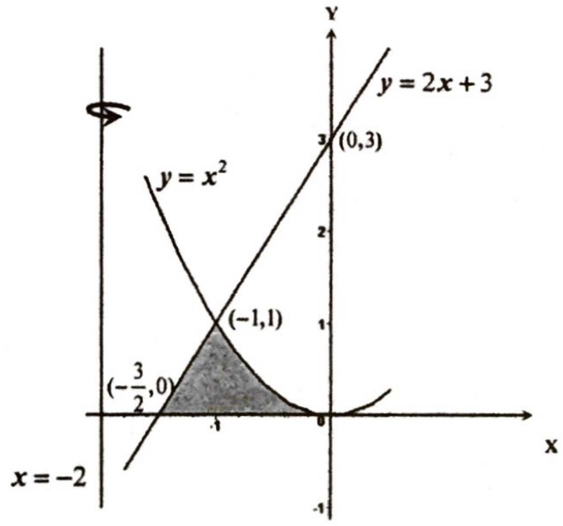
10.1 หมุนรอบแกน X หา<u>โดยวิธี Disk</u>

$V =$ ....

10.2 หมุนรอบแกน Y หา<u>โดยวิธี Shell</u>

$V =$ ....

11. กำหนดรูป



จากรูปจงหาปริมาตร (V) ที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่แรเงารอบเส้นตรงที่กำหนด โดยเขียนคำตอบในรูปอินทิกรัลจำกัดเขต <u>โดยไม่ต้องคำนวณค่า</u>

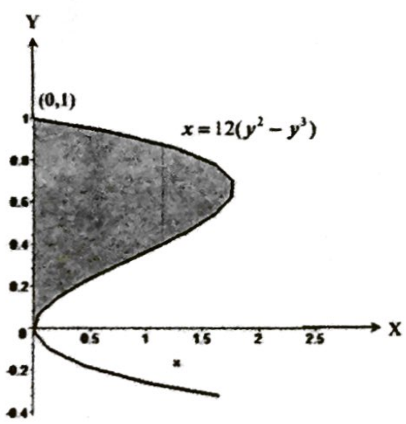
11.1 หมุนรอบเส้นตรง $x=-2$ หา<u>โดยวิธี Disk</u>

$V=$ ....

11.2 หมุนรอบเส้นตรง $x=-2$ หา<u>โดยวิธี Shell</u>

$V=$ ....

12. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่แรเงา



13. จงเขียนอินทิกรัลไม่ตรงแบบต่อไปนี้ ในรูปลิมิตของอินทิกรัลโดยไม่ต้องคำนวณค่า

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{2}{x^2-1}\,dx = \text{...}$$

14. จงตรวจสอบว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบต่อไปนี้ คอนเวอร์จ หรือ ไดเวอร์จ ถ้าคอนเวอร์จ จงหาค่าของอินทิกรัลนั้น

14.1 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{x}\,dx$

14.2 $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{(2-x)^{\frac{3}{4}}}\,dx$

เฉลยแบบฝึกหัดทบทวน

1). กำหนด $f(x) = \dfrac{1}{1+2x}$

1.1 จงหาพหุนามแมคลอรินอันดับ 3 ของ $f(x)$

; $$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!}$$

จาก $f(x) = \dfrac{1}{1+2x} = (1+2x)^{-1} \rightarrow f(0) = (1+0)^{-1} = 1$

$$f'(x) = -(1+2x)^{-2}(2) = -2(1+2x)^{-2} \rightarrow f'(0) = -2(1+0)^{-2} = -2$$

$$f''(x) = -2(-2)(1+2x)^{-3}(2) = 8(1+2x)^{-3} \rightarrow f''(0) = 8(1+0)^{-3} = 8$$

$$f'''(x) = 8(-3)(1+2x)^{-4}(2) = -48(1+2x)^{-4} \rightarrow f'''(0) = -48(1+0)^{-4} = -48$$

$$\therefore \frac{1}{1+2x} = (1) + (-2)x + \frac{(8)x^2}{2!} + \frac{(-48)x^3}{3!}$$

1.2 จงประมาณค่าของ $\dfrac{1}{1.02}$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินอันดับ 2

$$\therefore \frac{1}{1+2x} = \frac{1}{1.02}$$

$$1+2x = 1.02$$

$$2x = 1.02 - 1$$

$$2x = 0.02$$

$$x = 0.01$$

$$\therefore \frac{1}{1.02} = 1 - 2(0.01) + \frac{8(0.01)^2}{2!}$$

2) จงหาอินทิกรัลต่อไปนี้

2.1 $$\int \frac{1}{\sqrt{x}} - 3x^{\frac{1}{3}} - \frac{5}{x}\, dx$$

$$= \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx - 3\int x^{\frac{1}{3}}\, dx - 5\int \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - 5\ln|x| + C$$

2.2 $$\int \frac{\cos x \sin x}{\sin^2 x + 1}\, dx$$

ให้ $u = \sin^2 x + 1 = (\sin x)^2 + 1$

$$\frac{du}{dx} = 2(\sin x)^1 \cos x \quad , \quad dx = \frac{du}{2\sin x \cos x}$$

$$\therefore \int \frac{\cos x \sin x}{\sin^2 x + 1}\, dx = \int \frac{\cancel{\cos x \sin x}}{u} \cdot \frac{du}{2\cancel{\sin x}\cancel{\cos x}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\, du$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\sin^2 x + 1| + C$$

2.3

$$\int (2x-1)^{2011}\,dx$$

ให้ $u = 2x-1$

$$\frac{du}{dx} = 2 \quad , \quad dx = \frac{du}{2}$$

$$\therefore \int (2x-1)^{2011}\,dx = \int u^{2011}\,\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{2011}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{2012}}{2012} + c$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)^{2012}}{2012} + c.$$

2.4 $\int e^x \cdot e^{e^x}\, dx$

$u = e^x$

$\frac{du}{dx} = e^x$, $dx = \frac{du}{e^x}$

$\therefore \int e^x \cdot e^{e^x}\, dx = \int \cancel{e^x} \cdot e^u \frac{du}{\cancel{e^x}}$

$= \int e^u\, du$

$= e^u + c$

$= e^{e^x} + c$

2.5 $\int \operatorname{cosec} x\,(\cot x + \operatorname{cosec} x)\, dx$

$= \int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx + \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx$

$= -\operatorname{cosec} x - \cot x + c$

2.6

$$\int \frac{e^x}{1+9e^{2x}}\,dx = \int \frac{e^x}{1^2+(3e^x)^2}\,dx$$

$$u = 3e^x$$

$$\frac{du}{dx} = 3e^x \quad , \quad dx = \frac{du}{3e^x}$$

$$\int \frac{e^x}{1^2+(3e^x)^2}\,dx = \int \frac{\cancel{e^x}}{1^2+u^2}\,\frac{du}{3\cancel{e^x}}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1^2+u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1}\arctan\left(\frac{u}{1}\right) + C$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1}\arctan\left(\frac{3e^x}{1}\right) + C$$

3). $$\int \frac{\sin\theta \cos^8\theta}{1-\sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int \frac{\sin\theta \cos^{\cancel{8}\,6}\theta}{\cancel{\cos^2}\theta}\, d\theta$$

$$= \int \sin\theta . \cos^6\theta \, d\theta$$

Put $u = \cos\theta$

$$\frac{du}{d\theta} = -\sin\theta \quad , \quad d\theta = \frac{du}{-\sin\theta}$$

$$\therefore \int \sin\theta . \cos^6\theta \, d\theta = \int \sin\theta . u^6 \frac{du}{-\sin\theta}$$

$$= - \int u^6 du$$

$$= - \frac{u^7}{7} + c$$

$$= - \frac{\cos^7\theta}{7} + c$$

4). $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\,dx \longrightarrow \int \frac{1}{x^2\sqrt{\underset{=}{x}^2-\underset{=}{2}^2}}\,dx$

$$\underbrace{\qquad}_{u^2-a^2}$$

ให้ $u = a\sec\theta$

ให้ $x = 2\sec\theta$

$dx = 2\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

$$\therefore \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-2^2}}\,dx = \int \frac{\cancel{2\sec\theta}\tan\theta\,d\theta}{2^{\cancel{2}}\sec^{\cancel{2}}\theta\sqrt{2^2\sec^2\theta-2^2}}$$

$$= \int \frac{\tan\theta\,d\theta}{2\sec\theta\sqrt{2^2(\sec^2\theta-1)}}$$

$$= \int \frac{\tan\theta\,d\theta}{2\sec\theta\sqrt{2^2\tan^2\theta}}$$

$$= \int \frac{\cancel{\tan\theta}\,d\theta}{2\sec\theta\cdot 2\cancel{\tan\theta}}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sec\theta}\,d\theta$$

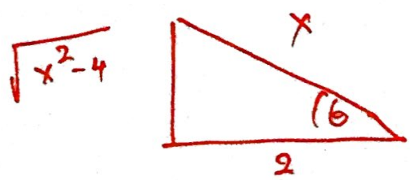
$$= \frac{1}{4}\int \cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\sin\theta + C$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\right) + C$$

จาก $x = 2\sec\theta$

$\sec\theta = \frac{x}{2}$



$\sin\theta = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$

5) $\int \cos(3x)\cos(5x)\,dx$

$$= \int \frac{1}{2}\left[\cos\left((3x)-(5x)\right) + \cos\left((3x)+(5x)\right)\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \underset{①}{\cos(-2x)} + \underset{②}{\cos(8x)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\sin(-2x) + \frac{1}{8}\sin(8x)\right] + C$$

① $\int \cos(-2x)\,dx$

$u = -2x$

$\frac{du}{dx} = -2, \quad dx = \frac{du}{-2}$

$\int \cos(-2x)\,dx = \int \cos u \frac{du}{-2}$

$= -\frac{1}{2}\int \cos u\,du$

$= -\frac{1}{2}\sin u$

$= -\frac{1}{2}\sin(-2x)$

② $\int \cos(8x)\,dx$

$u = 8x$

$\frac{du}{dx} = 8, \quad dx = \frac{du}{8}$

$\int \cos(8x)\,dx = \int \cos u \frac{du}{8}$

$= \frac{1}{8}\int \cos u\,du$

$= \frac{1}{8}\sin u$

$= \frac{1}{8}\sin(8x)$

6) $\int x \operatorname{cosec}^2 x \, dx$

ให้ $u = x$, $dv = \operatorname{cosec}^2 x \, dx$

$\frac{du}{dx} = 1$, $v = \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx$

$du = dx$, $v = -\cot x$

$\therefore$ จาก $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$$\int x \operatorname{cosec}^2 x \, dx = [x][-\cot x] - \int [-\cot x][dx]$$

$$= -x\cot x + \int \cot x \, dx$$

$$= -x\cot x + \ln|\sin x| + C$$

#

7) จงเปลี่ยนฟังก์ชันตรรกยะเป็นผลบวกของเศษส่วนย่อย โดยไม่ต้องคำนวณค่าคงที่

$$\frac{5x^2+1}{(x-2)^2(x^2+x+13)} = \frac{A}{(x-2)^1} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{(x^2+x+13)^1}$$

8) $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+2}{x(x^2+1)}\,dx$

จาก $f(x) = \dfrac{2x^2+x+2}{x(x^2+1)}$

ให้ $\dfrac{2x^2+x+2}{x(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$

คูณ $x(x^2+1)$ ทั้งสมการจะได้

$$2x^2+x+2 = A(x^2+1) + (Bx+C)x$$

$$2x^2+x+2 = Ax^2+A + Bx^2+Cx$$

$$2x^2+x+2 = (A+B)x^2 + Cx + A$$

เทียบ ส.ป.ส จะได้

$A+B = 2$ ①

$C = 1$ ②

$A = 2$ ③

$B = 0$

ดังนั้น $\dfrac{2x^2+x+2}{x(x^2+1)} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{\cancel{0x}+1}{x^2+1}$

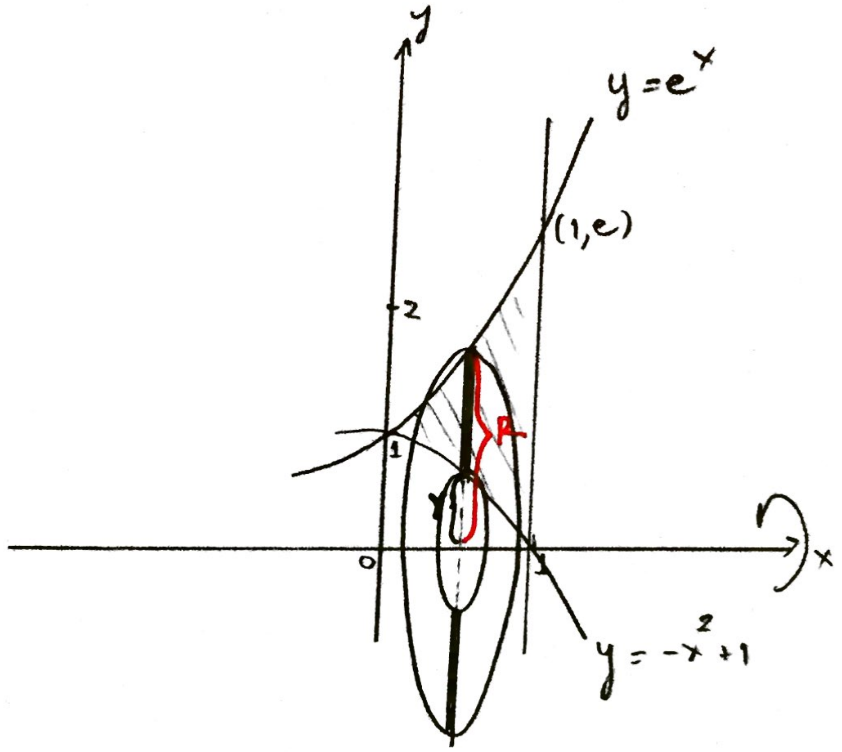
สูตร 17

$$\therefore \int \frac{2x^2+x+2}{x(x^2+1)}\,dx = 2\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= 2\ln|x| + \frac{1}{1}\arctan\left(\frac{x}{1}\right) + C$$

ข). จากรูปโจทย์

ข.1 Disk รอบแกน x

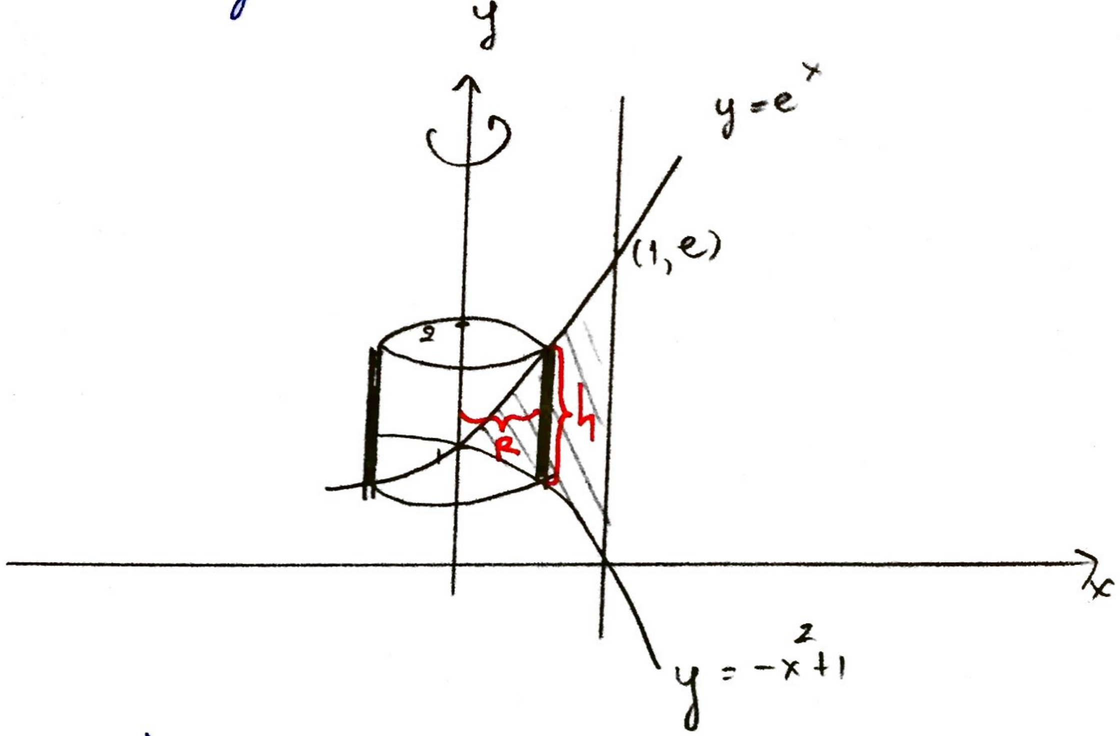


$$V = \pi \int_a^b R^2 - r^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^1 [e^x - 0]^2 - [(-x^2+1) - 0]^2 \, dx$$

$\#$

9.2 Shell รอบแกน y

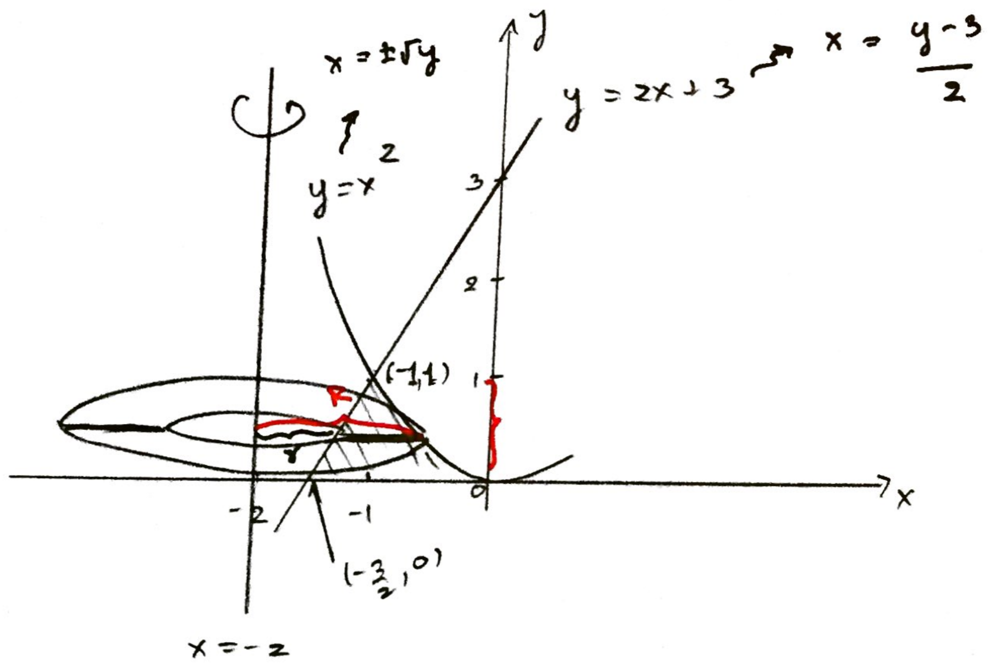


$$V = 2\pi \int_a^b Rh \, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 [x-0][e^x - (-x^2+1)] \, dx$$

10.) ทรงรูปโดนัท

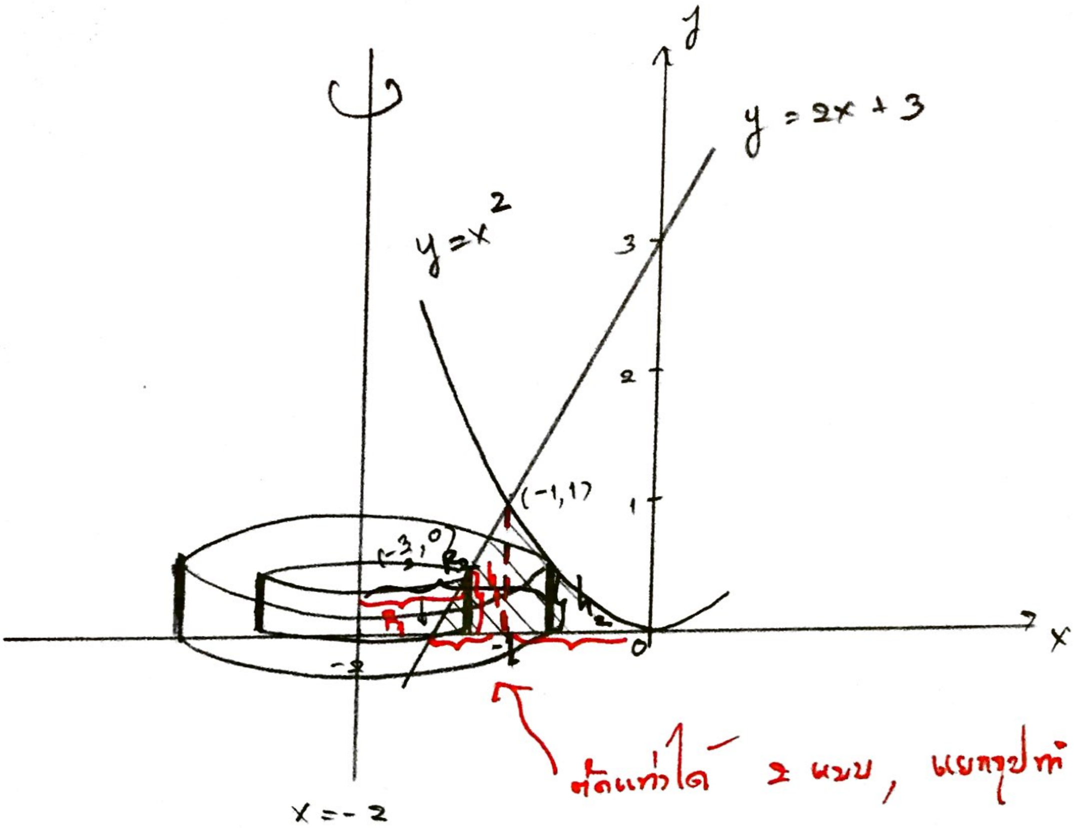
10.1 Disk รอบเส้นตรง $x = -2$



$$V = \pi \int_a^b R^2 - r^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^1 [(-\sqrt{y}) - (-2)]^2 - [\frac{y-3}{2} - (-2)]^2 \, dy$$

10.2 Shell รอบเส้นตรง $x = -2$

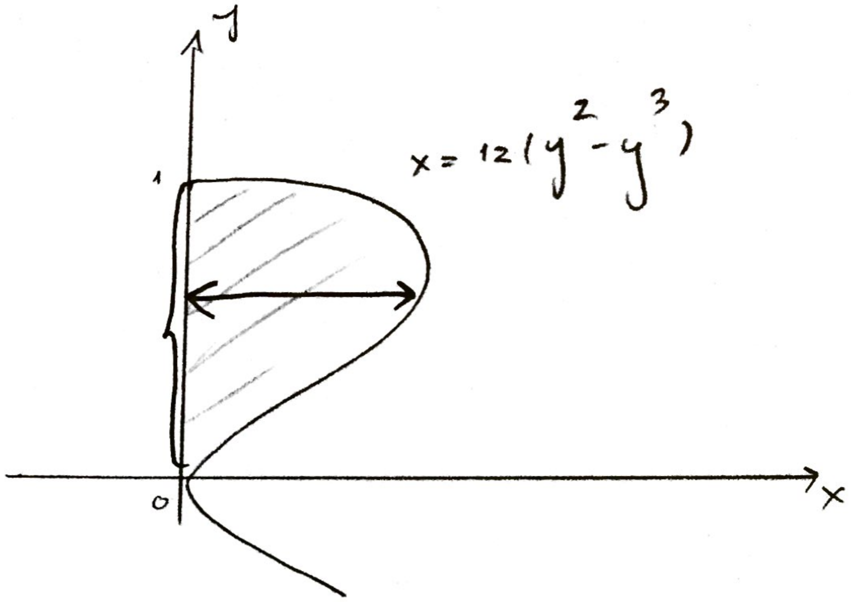


ตัดแท่งได้ 2 แบบ, แยกกรุ๊ปทำ 2 ครั้ง

$$V = 2\pi \int_{a_1}^{b_1} R_1 h_1 \, dx + 2\pi \int_{a_2}^{b_2} R_2 h_2 \, dx$$

$$= 2\pi \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} [x-(-2)][(2x+3)-0] \, dx + 2\pi \int_{-1}^{0} [x-(-2)][x^2-0] \, dx$$

11). จงคำนวณพื้นที่



$$A = \int_0^1 12(y^2 - y^3) - 0 \, dy$$

$$= 12\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1$$

$$= 12\left[\frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{4}\right] - 12\left[\cancel{0 - 0}\right]$$

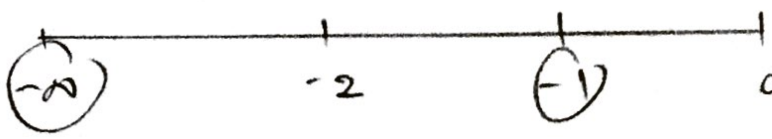
$$= 12\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= 12\left(\frac{1}{12}\right)$$

$$= 1$$

(12) เขียนอินทิกรัล ในรูปลิมิต ไม่ต้องคำนวณค่า

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{2}{x^2-1}\,dx \qquad \text{ไม่ต่อเนื่องที่ } x = -\infty, -1, \cancel{1}$$



$$\int_{-\infty}^{0} \frac{2}{x^2-1}\,dx = \int_{-\infty}^{-2} \frac{2}{x^2-1}\,dx + \int_{-2}^{-1} \frac{2}{x^2-1}\,dx + \int_{-1}^{0} \frac{2}{x^2-1}\,dx$$

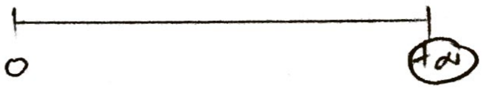
$$= \lim_{A \to -\infty} \int_{A}^{-2} \frac{2}{x^2-1}\,dx + \lim_{B \to -1^-} \int_{-2}^{B} \frac{2}{x^2-1}\,dx$$

$$+ \lim_{C \to -1^+} \int_{C}^{0} \frac{2}{x^2-1}\,dx$$

13) ทดสอบอินทิกรัล คอนเวอร์จ หรือ ไดเวอร์จ

13.1 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{x}\,dx$

ไม่ต่อเนื่องที่ $x = +\infty$



$$\int_{0}^{+\infty} e^{x}\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_{0}^{A} e^{x}\,dx$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \left[e^{x} \right]_{0}^{A}$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \left[e^{A} - e^{0} \right]$$

$$= +\infty - 1$$

$$= +\infty$$

$\therefore$ ไดเวอร์จ

13.2

$$\int_1^2 \frac{1}{(2-x)^{\frac{3}{4}}}\,dx$$

ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$

$$\int_1^2 \frac{1}{(2-x)^{\frac{3}{4}}}\,dx = \lim_{A \to 2^-} \int_1^A \frac{1}{(2-x)^{\frac{3}{4}}}\,dx$$

$$= \lim_{A \to 2^-} \left[-4\sqrt[4]{2-x}\,\right]_1^A$$

$$= \lim_{A \to 2^-} \left[\left(-4\sqrt[4]{2-A}\right) - \left(-4\sqrt[4]{2-1}\right)\right]$$

$$= 0 + 4\sqrt[4]{1}$$

$$= 4$$

$\therefore$ คอนเวอร์จ

$$\int \frac{1}{(2-x)^{\frac{3}{4}}}\,dx$$

$u = 2-x$

$\frac{du}{dx} = -1, \quad dx = -du$

$$\int \frac{1}{(2-x)^{\frac{3}{4}}}\,dx = \int \frac{1}{u^{\frac{3}{4}}}(-du) = -\int u^{-\frac{3}{4}}\,du = -\frac{u^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}}$$

$$= -4\sqrt[4]{2-x}$$