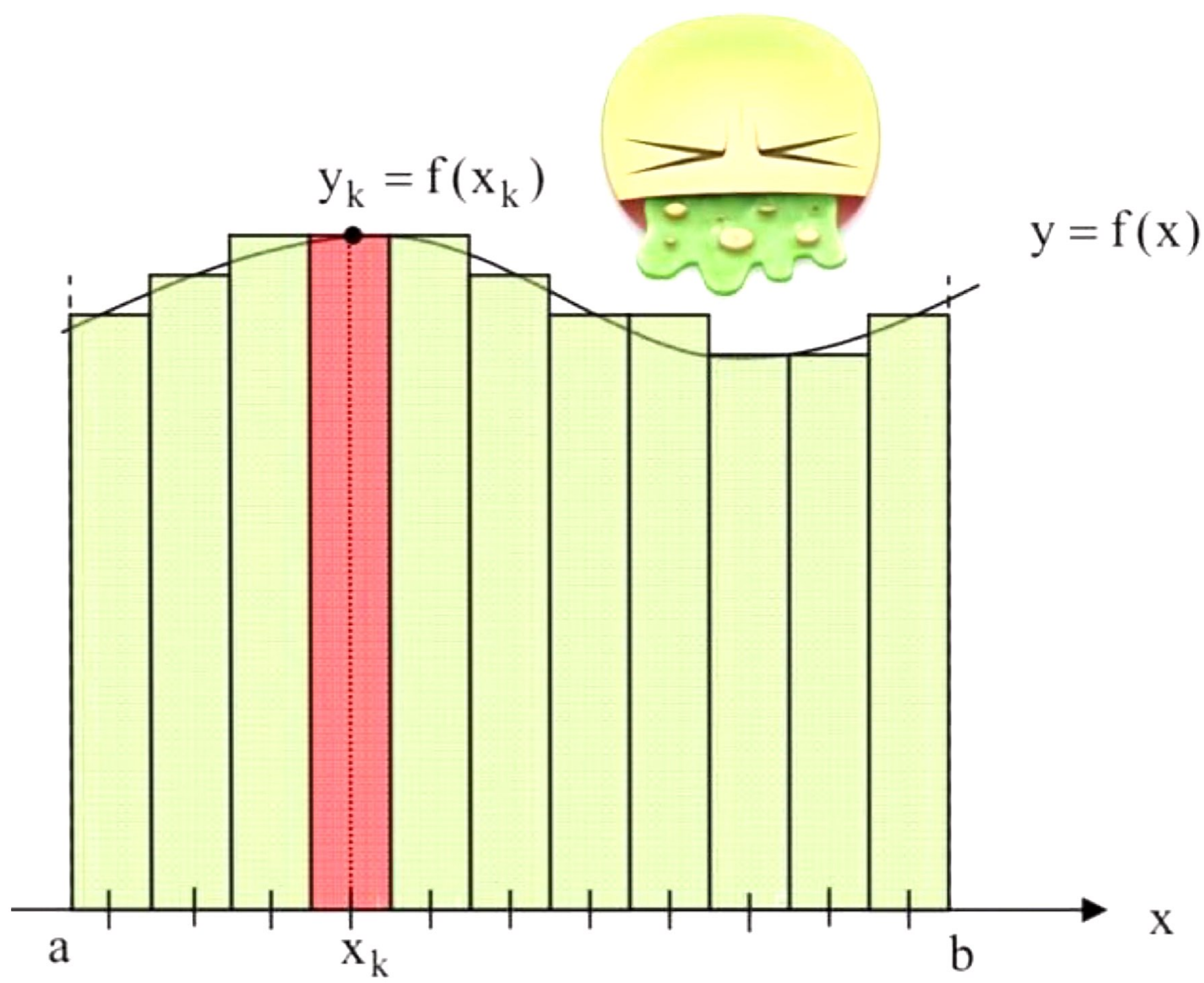
Review 206111
Mid



By.. พี่โทน

FB : ptone.calcal
Line : k_tanwa

บทที่ 1

ลิมิต และ ความต่อเนื่อง ของฟังก์ชัน

1) ลิมิตของฟังก์ชัน

   1.1 การดูลิมิตจากกราฟ

   1.2 การหาลิมิตจากฟังก์ชัน

2) ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

3) ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง

ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

1) ลิมิตของฟังก์ชัน

กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ และ $x = a$

ลิมิตของฟังก์ชัน คือ ค่าประมาณของ $y, f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a

ลิมิตซ้าย $(x < a)$ $\lim_{x \to a^-} f(x)$

ลิมิตขวา $(x > a)$ $\lim_{x \to a^+} f(x)$

ลิมิตรวม $(x < a)$ + $(x > a)$ $\lim_{x \to a} f(x)$

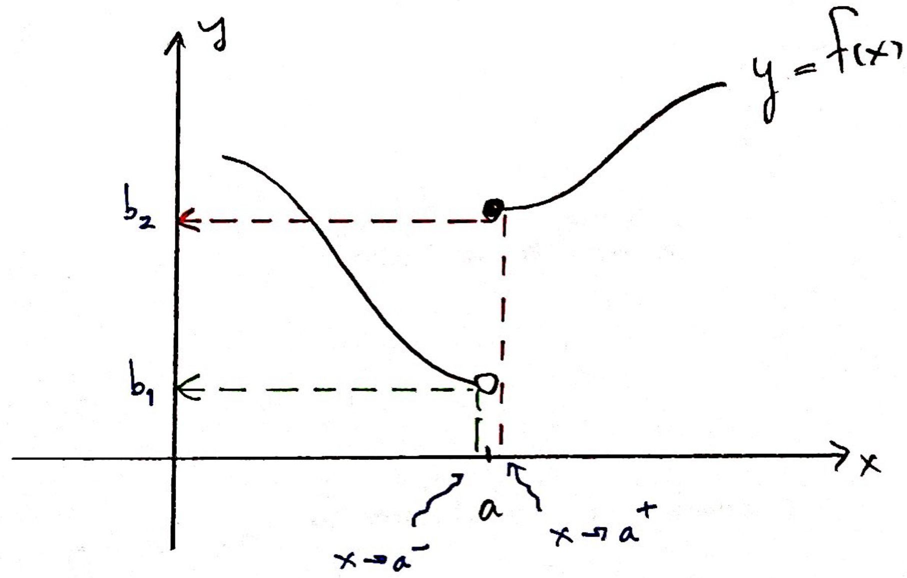
***

$\lim_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$

1.1 การดูลิมิตจากกราฟ

→ ประมาณค่า x เป็นทศนิยม

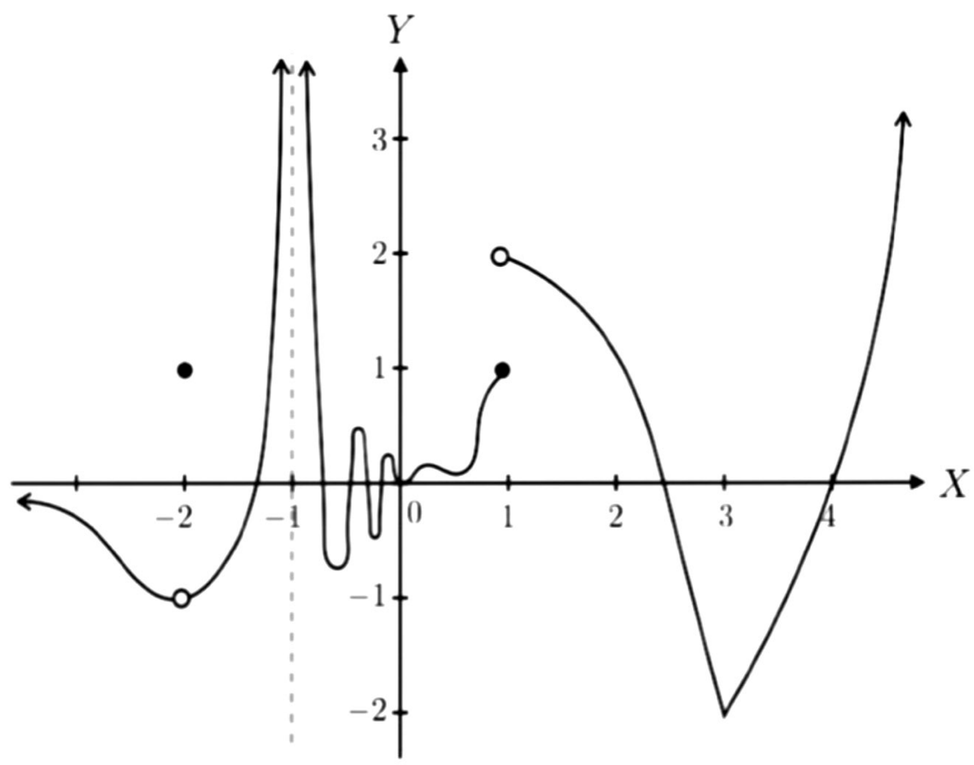
→ ประมาณค่าความสูง y จากกราฟ



$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b_1$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = b_2$$

Given function f defined by the following graph. ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามดังกราฟ



Find the following limits. If any limits approach infinity, state either $+\infty$ or $-\infty$.

จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ (ในกรณีที่ลิมิตเข้าใกล้อนันต์ ให้ระบุว่าเป็น $+\infty$ หรือ $-\infty$)

1 $\lim_{x\to -1} f(x)$ = ________________

2 $\lim_{x\to 1} f(x)$ = ________________

3 $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ = ________________

4 $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ = ________________

5 $\lim_{x\to 4}[x^2 + f(x)]$ = ________________

1.2 การหาลิมิตจากฟังก์ชัน

กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$

; $\lim\limits_{x \to a,\ a^-,\ a^+} f(x) = f(a)$ ถ้า $f(a)$ หาค่าได้

ถ้า $f(a) = \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, จัดรูปใหม่ หาลิมิตใหม่

$f(a) = \frac{c}{\infty} = 0$

$f(a) = \frac{c}{0}$
- = หาค่าไม่ได้ (ลิมิตหาย)
- = $+\infty$ หรือ $-\infty$ (ลิมิตซ้าย, ขวา)

(แทน x ทดสอบด้วยทศนิยม
- คำตอบ $+ \rightarrow +\infty$
- คำตอบ $- \rightarrow -\infty$)

กำหนดฟังก์ชัน
$$y = \begin{cases} f_1(x) & ; \quad x < a \\ f_2(x) & ; \quad x > a \end{cases}$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f_1(a)$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f_2(a)$$

Compute the following limits. จงคำนวนหาค่าลิมิตต่อไปนี้

$$\lim_{x\to 1^-}\left[\frac{x-3}{(x-1)(x-2)^2}\right] = \text{..................................}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{x-3}{(x-1)(x-2)^2}\right] = \text{..................................}$$

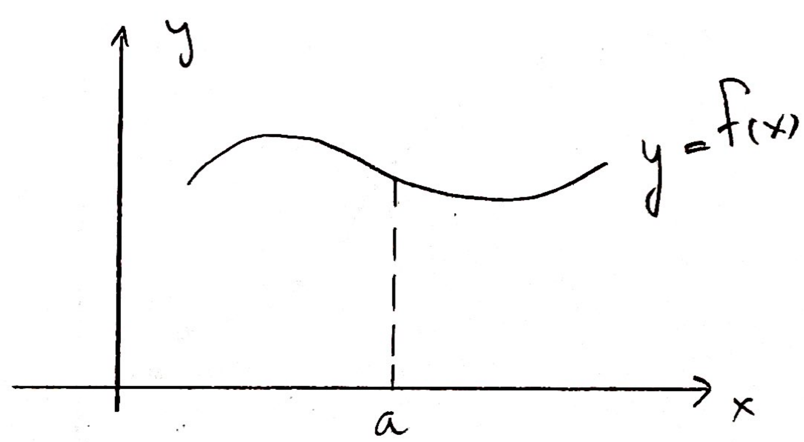
$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x-1}{(x-3)(x-2)^2}\right] = \text{..................................}$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x+1}{(x-3)(x-2)^2}\right] = \text{..................................}$$

๒) ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$

ฟังก์ชัน $y = f(x)$ จะมีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$ ก็ต่อเมื่อ



1. $f(a)$ หาค่าได้

2. $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้

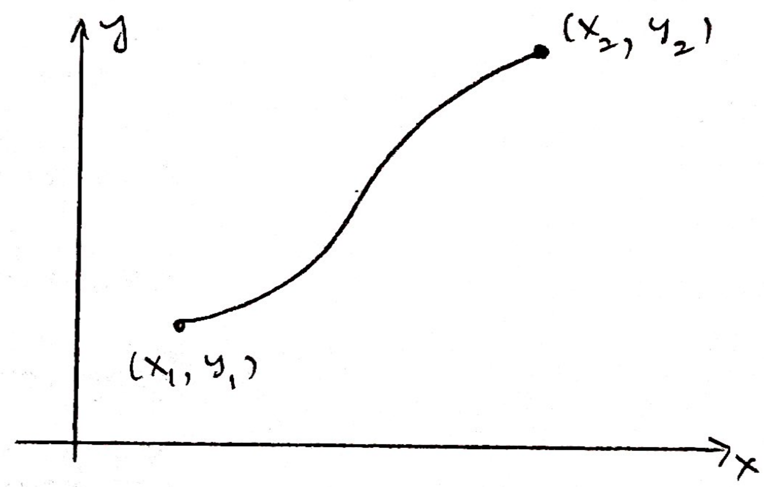
3. $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

Is the following function continuous at $x = 2$? ฟังก์ชันต่อไปนี้ ต่อเนื่องที่ $x = 2$ หรือไม่

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & , x < 2 \\ 2 & , x = 2 \\ x^2 - 2 & , x > 2 \end{cases}$$

3) ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง

กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่อง จากจุด (x_1, y_1) ถึงจุด (x_2, y_2)



จะได้ว่า $y = f(x)$ มีค่า $x \in [x_1, x_2]$

และ $y \in [y_1, y_2]$

Use Intermediate-Value Theorem to show that there exists $x \in [-2, 0]$ such that $x^4 - 3x^2 - 1 = 2$.
จงใช้ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง แสดงว่ามี $x \in [-2, 0]$ ซึ่ง $x^4 - 3x^2 - 1 = 2$

บทที่ 2

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน และการประยุกต์

1) การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$

1.1 การหาอนุพันธ์โดยใช้นิยาม

1.2 การหาอนุพันธ์โดยใช้สูตร

1.3 การหาอนุพันธ์อันดับสูง

2) การหาอนุพันธ์โดยใช้กฎลูกโซ่

3) การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันแฝง

4) การหาอนุพันธ์โดยใช้ลอการิทึม

5) การหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน

6) การประยุกต์

6.1 อัตราการเปลี่ยนแปลง

6.2 อัตราสัมพัทธ์

6.3 เส้นสัมผัส, เส้นตั้งฉาก

6.4 การหาค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ดิฟเฟอเรนเชียล

6.5 การประมาณเชิงเส้น

6.6 ลิมิตพื้นฐาน

6.7 รูปอินดิเทอร์มิเนต

6.8 การวิเคราะห์กราฟ

6.9 การวิเคราะห์ค่าสุดขีด

- ค่าสุดขีดสัมพัทธ์
- ค่าสุดขีดสัมบูรณ์

อนุพันธ์ของฟังก์ชันและการประยุกต์

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน หมายถึง อัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน

กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชัน

อนุพันธ์ของฟังก์ชันกำหนดโดย $\frac{dy}{dx}$, y' , $\frac{d}{dx}y$, $\frac{df(x)}{dx}$, $f'(x)$, $\frac{d}{dx}f(x)$

1) การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$

1.1 การหาอนุพันธ์โดยบทนิยาม

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overset{①}{f(x+\Delta x)} - \overset{②}{f(x)}}{\Delta x}$$

ที่จุด $x = a$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overset{①}{f(a+\Delta x)} - \overset{②}{f(a)}}{\Delta x}$$

หรือ

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\overset{①}{f(x)} - \overset{②}{f(a)}}{x - a}$$

*** แทนค่าฟังก์ชัน ①, ② → จัดรูปจนกว่าจะตัดตัวหารในสูตรได้

Use the definition of derivative to find the $f'(x)$ of $f(x) = x^2 + 1$.
จงใช้นิยามของอนุพันธ์เพื่อหา $f'(x)$ ของ $f(x) = x^2 + 1$

1.2 การหาอนุพันธ์โดยการใช้สูตร

กำหนดให้ u, v เป็นฟังก์ชัน , c, a, n เป็นค่าคงที่

1) จัดรูปฟังก์ชัน

$$\frac{d}{dx}[u \pm v] = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[u.v] = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \quad , \quad v \neq 0$$

$$\frac{d}{dx}cu = c\frac{du}{dx}$$

2) แทนสูตร

$$\frac{d}{dx}c = 0$$

$$\frac{d}{dx}x = 1$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx} \qquad \left(u^n \to (\text{ฟังก์ชัน})^{\text{ตัวเลข}} \right)$$

$$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx} \qquad \left(a^u \to (\text{ตัวเลข})^{\text{ฟังก์ชัน}} \right)$$

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{1}{u \ln a}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\sin u = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec} u \cot u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\cot u = -\operatorname{cosec}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\arcsin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\arccos u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\arctan u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccosec} u = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccot} u = \frac{-1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

Find the derivatives of the following functions. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1 $y = 2x^2 + \dfrac{1}{x} - \sqrt{x} + \log_3 x$

2 $y = 4x^3 2^x$

3 $y = \dfrac{2\ln x}{-6x + \sin x}$

4 $y = \cos(3x^2) - 2\cot(x^4)$

5 $y = \arcsin x + \arctan(x^3)$

1.3 การหาอนุพันธ์อันดับสูง

เป็นการหาอนุพันธ์ซ้ำจาก อนุพันธ์ที่ได้ก่อนหน้า

อนุพันธ์อันดับ 2 ; $\frac{d^2y}{dx^2}$, $f''(x)$

เมื่อ $f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x)$

อนุพันธ์อันดับ 3 ; $\frac{d^3y}{dx^3}$, $f'''(x)$

เมื่อ $f'''(x) = \frac{d}{dx} f''(x)$

อนุพันธ์อันดับ n ; $\frac{d^ny}{dx^n}$, $f^{(n)}(x)$

เมื่อ $f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x)$

Let $y = \tan x + 3e^{2x}$. Find y''. กำหนด $y = \tan x + 3e^{2x}$ จงหา y''

Given $y = xe^x$, find $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$. กำหนดให้ $y = xe^x$ จงหา $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$

2) การหาอนุพันธ์โดยใช้กฎลูกโซ่

*** ใช้เมื่อ มี 2 ฟังก์ชันขึ้นไป และฟังก์ชันมีตัวแปรเชื่อมต่อกัน

กำหนดให้ $y = f(u)$ และ $u = g(x)$

ได้ว่า $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ex ให้ $y = \sin u$ และ $u = 2x$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

; $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d}{du}\sin u \cdot \frac{d}{dx}2x$$

$$= \cos u \cancel{\frac{du}{du}} \cdot 2\cancel{\frac{dx}{dx}}$$

$$= 2\cos u$$

$$= 2\cos(2x)$$ *

Let $w = s^2 + 1$, $s = \ln u$ and $u = \sec x$, find $\left.\dfrac{dw}{dx}\right|_{x=0}$.

กำหนดให้ $w = s^2 + 1$, $s = \ln u$ และ $u = \sec x$ จงหา $\left.\dfrac{dw}{dx}\right|_{x=0}$

3) การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันแฝง

ฟังก์ชันแฝง คือ ฟังก์ชันที่ไม่อยู่ในรูป $y = f(x)$

ลักษณะฟังก์ชัน ?

- มี 2 ข้าง เหมือนสมการ
- x, y อยู่ปนกัน

Ex
$$x^2 + y^2 = 2xy$$
$$xy + \sin y = x + y$$

ขั้นตอนการหาอนุพันธ์

1) Diff ทั้ง 2 ข้าง

Diff ตัว x ได้คำตอบปกติตามสูตร

Diff ตัว y ได้คำตอบเหมือน Diff ตัว x แต่ต้องมี $\frac{dy}{dx}$ ติดมาด้วย

Ex
$$\frac{d}{dx}x = 1 \quad , \quad \frac{d}{dx}y = 1\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x \quad , \quad \frac{d}{dx}y^2 = 2y\frac{dy}{dx}$$

2) จัดรูป กระจายวงเล็บ

3) ย้ายข้างสมการแยกฝั่ง ระหว่าง พจน์ที่มี $\frac{dy}{dx}$ กับ พจน์ที่ไม่มี $\frac{dy}{dx}$

4) ถ้ามี $\frac{dy}{dx}$ มากกว่า 1 ตัว, ดึง $\frac{dy}{dx}$ เป็นตัวร่วม

5) แก้สมการหา $\frac{dy}{dx}$

Let $x^2y + y^2 = kx - 555$. if $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(2,0)} = 4$, then find the value k by implicit differentiation.

ให้ $x^2y + y^2 = kx - 555$ ถ้า $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(2,0)} = 4$ แล้วจงหาค่า k โดยใช้การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันแฝง

4) การหาอนุพันธ์โดยใช้ลอการิทึม

<u>ใช้เมื่อ</u>

1) ฟังก์ชันอยู่ในรูป ผลคูณ หรือ ผลหาร ตั้งแต่ 3 พจน์ขึ้นไป

Ex

$$y = \frac{e^{2x} \cdot \sin x}{\sqrt{x}}$$

$$f(x) = x^2 . \cos x . \ln x$$

2) ฟังก์ชันอยู่ในรูป ฟังก์ชัน ยกกำลัง ฟังก์ชัน

Ex

$$y = x^{\sin x}$$

$$f(x) = (x+1)^{\ln x}$$

<u>ขั้นตอนการหาอนุพันธ์</u>

1) ใส่ ln ทั้ง 2 ข้าง

2) จัดรูปโดยใช้สมบัติ

$$\ln\left(\frac{ab}{cd}\right) = \ln a + \ln b - \ln c - \ln d$$

$$\ln a^b = b \ln a$$

3) Diff ทุกตัวในสมการ

4) แก้สมการหา $\frac{dy}{dx}$

Use logarithmic differentiation to find dy/dx of $y = (\tan x)^{\sin x}$.
จงใช้การหาอนุพันธ์โดยลอการิทึมในการหา dy/dx ของฟังก์ชัน $y = (\tan x)^{\sin x}$

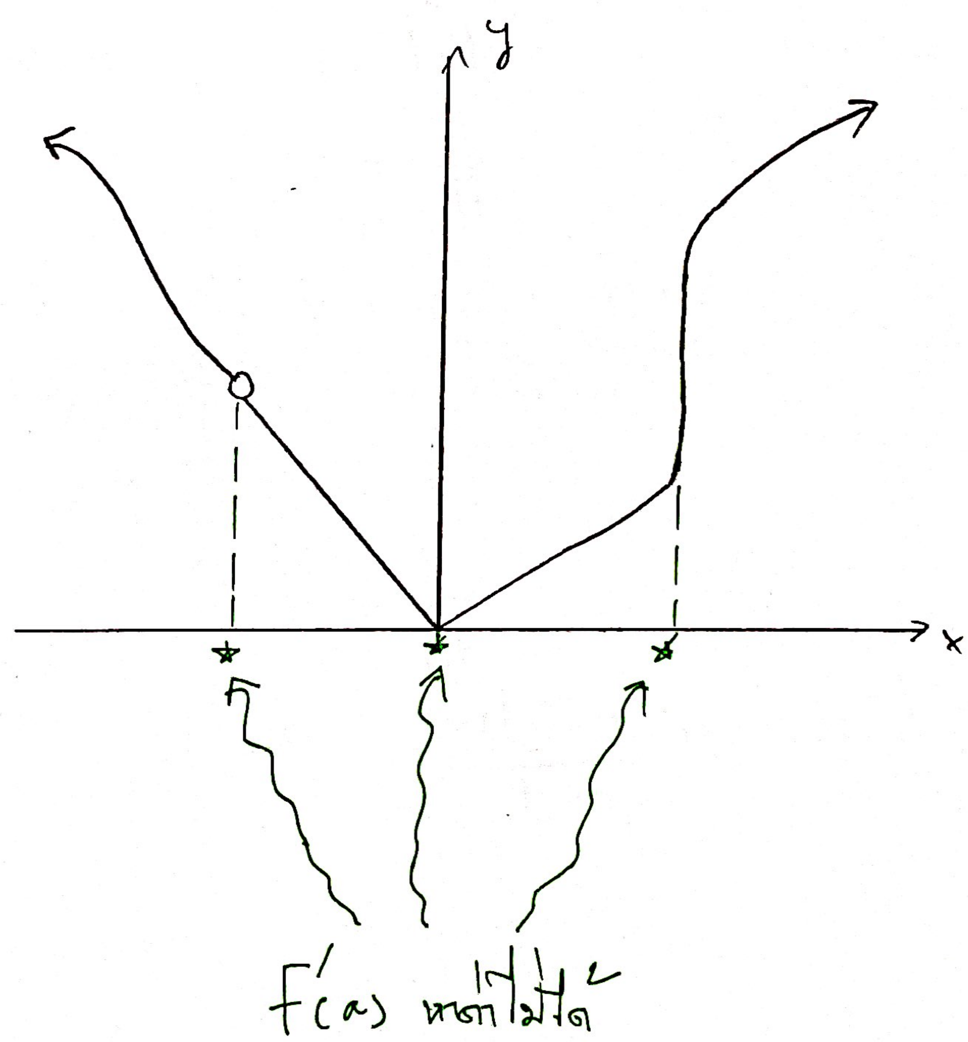
5) การหาอนุพันธ์ได้ของฟังก์ชัน

กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$; $f'(a)$ จะหาค่าได้ก็ต่อเมื่อ

1) ฟังก์ชันมีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$ (กราฟไม่ขาด)

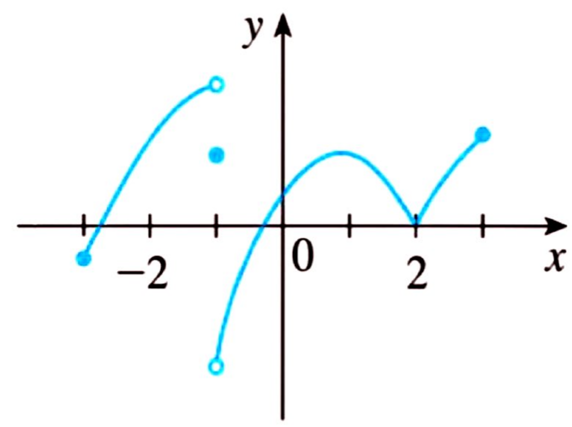
2) อนุพันธ์ทางซ้ายที่จุด $x = a$ = อนุพันธ์ทางขวาที่จุด $x = a$
(กราฟไม่แหลม)

3) $f'(a) \neq \pm\infty$ (กราฟไม่เป็นแนวตั้ง)



. From the following graph of f, locate the points x at which f is

(กำหนดกราฟของฟังก์ชัน f ดังต่อไปนี้ จงหาจุด x ที่ทำให้ f มีสมบัติ)



(a) continuous (ต่อเนื่อง)

____

(b) continuous and nondifferentiable (ต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ไม่ได้)

____

(c) discontinuous and nondifferentiable (ไม่ต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ไม่ได้)

____

6) การประยุกต์

6.1 อัตราการเปลี่ยนแปลง

กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$

* อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $y \quad = \quad \dfrac{dy}{dx}$

** อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ $y \quad = \quad \dfrac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1}$
(ในช่วง x_1 ถึง x_2)

การเคลื่อนที่

กำหนดฟังก์ชันระยะทาง $s = f(t)$

* อัตราเร็ว $v = \dfrac{ds}{dt}$

** อัตราเร็วเฉลี่ย $\bar{v} = \dfrac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$
(ในช่วง t_1 ถึง t_2)

* อัตราเร่ง $a = \dfrac{dv}{dt}$

** อัตราเร่งเฉลี่ย $\bar{a} = \dfrac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$
(ในช่วง t_1 ถึง t_2)

The population of panthers in the Maloon island at the time t (year) is determined by the equation.
จำนวนประชากรของเสือดำในเกาะมาลูน (ตัว) ณ เวลา t (ปี)

$$f(t) = \frac{1}{100}(t-50)^2 + 50, \qquad 0 \leq t \leq 40$$

1 During the time $t = 0$ to $t = 10$, and $t = 30$ to $t = 40$, which duration have the larger average rate of change?
ในช่วงเวลา $t = 0$ ถึง $t = 10$ และ $t = 30$ ถึง $t = 40$ ช่วงใดที่อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของประชากรมากกว่ากัน

2 Does the population of panthers decrease or increase at $t = 30$? What is its rate of change?
ณ เวลา $t = 30$ จำนวนเสือดำเพิ่มขึ้นหรือลดลงด้วยอัตราเท่าไร

6.2 อัตราสัมพัทธ์

เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลง <u>เทียบกับ</u> <u>เวลา</u> !

*** โจทย์ → ข้อมูล → หน่วย → ?/เวลา !!

<u>หลักการ</u>

1) ตั้ง $\frac{d}{dt}$ ทั้ง 2 ข้าง

2) Diff ทุกตัวแปรต้องติด $\frac{d?}{dt}$

3) แทนค่าข้อมูล

4) คำนวณอัตราที่โจทย์ถาม

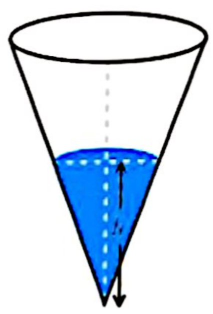
*** ปริมาณเพิ่มขึ้น $\frac{d?}{dt} > 0$

ปริมาณลดลง $\frac{d?}{dt} < 0$

ปริมาณคงที่ $\frac{d?}{dt} = 0$

Water runs into a conical tank at a constant rate of $2\ m^3/min$. How fast is the water level h rising when the water is level is at $h = 3\ m$ deep? Given $V(h) = \dfrac{1}{27}\pi h^3$.

น้ำไหลเข้าถังรูปทรงกรวยด้วยอัตราคงที่ 2 ลูกบาศก์เมตรต่อนาที จงหาว่าระดับน้ำ h จะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าใด เมื่อระดับน้ำมีความสูง 3 เมตร กำหนดให้ $V(h) = \dfrac{1}{27}\pi h^3$



63 เส้นสัมผัส, เส้นตั้งฉาก

กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$

พิจารณาที่จุด (a, b)

จะได้ว่า

1) ความชันของเส้นสัมผัส

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(a,b)}$$!

2) สมการเส้นสัมผัส

$$y - b = m(x - a)$$!!

สมการเส้นตั้งฉาก

$$y - b = -\frac{1}{m}(x - a)$$!!

Let f be a function such that $f(1) = 5$ and $f'(1) = 6$. Find the equation of the tangent line of f at $x = 1$.

ให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $f(1) = 5$ และ $f'(1) = 6$ จงหาสมการเส้นสัมผัสกราฟ f ที่ $x = 1$

Let $y = 2x + 5$ be the equation of the tangent line of function $y = f(x)$ at $x = 2$.
Then $f(2) =$ .... and $f'(2) =$ ....

กำหนดให้ $y = 2x + 5$ คือสมการเส้นสัมผัสของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่ $x = 2$
จะได้ว่า ค่าของ $f(2) =$ .... และค่าของ $f'(2) =$ ....

6.4 การหาค่าคลาดเคลื่อน โดยใช้ ดิฟเฟอเรนเชียล

กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$

ให้ dy แทนความคลาดเคลื่อนของ y

dx แทนความคลาดเคลื่อนของ x

จะได้ว่า

$$dy = f'(x)\,dx$$!!!

เมื่อ x เป็นค่าเริ่มต้นของ x ที่ยังไม่คลาดเคลื่อน

<u>ประเภทของค่าคลาดเคลื่อน</u>

ค่าคลาดเคลื่อน $= dy$

ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ $= \dfrac{dy}{y}$

ค่าคลาดเคลื่อนร้อยละ $= \dfrac{dy}{y} \times 100$

Assume that the balloon is spherical in shape. If the radius r of a balloon increases from 2 cm to 2.01 cm. Use the differential to estimate the increase in the volume V of the balloon. Given the volume of a sphere is $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

สมมติให้ลูกโป่งเป็นทรงกลม ถ้ารัศมีของลูกโป่งเพิ่มขึ้น จาก 2 ซม. เป็น 2.01 ซม. จงใช้ดิฟเฟอเรนเชียลประมาณค่าของปริมาตรของลูกโป่งที่เพิ่มขึ้น โดยกำหนดให้ปริมาตรของทรงกลมคือ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

6.5 การประมาณเชิงเส้น

กำหนดให้ $f(b)$ เป็นค่าที่จะประมาณ ???

ขั้นตอน

1) จาก $f(b)$, วิเคราะห์หา $f(x) = ?$

$b = ?$

2) วิเคราะห์หา จุด $a = ?$ ที่ใกล้เคียงกับจุด b

3) สร้าง

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$ ***

4) หา $f(a)$, $f'(a)$ และสรุป $L(x)$ ให้เรียบร้อย

5) ประมาณค่าโดย

$$f(b) \approx L(b)$$

. Use linear approximation to estimate $\ln 1.01$.
จงใช้การประมาณเชิงเส้น ประมาณค่า $\ln 1.01$

๖.๖ ลิมิตพื้นฐาน (จำ)

1) $\frac{c}{\pm\infty} = 0$

$\frac{c}{0} = \begin{cases} \text{หาค่าไม่ได้ (ลิมิตรวม)} \\ +\infty \text{ หรือ } -\infty \text{ (ลิมิตซ้าย, ลิมิตขวา)} \end{cases}$

แทนค่า x เป็นทศนิยมทดลอง $\begin{cases} \text{ค่าตอบได้ } + \to +\infty \\ \text{ค่าตอบได้ } - \to -\infty \end{cases}$

2) $e^0 = 1$

$e^1 = e$

$e^{+\infty} = +\infty$

$e^{-\infty} = 0$

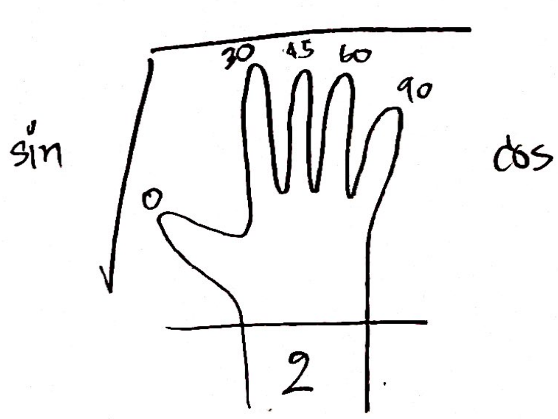
3) $\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln(+\infty) = +\infty$

$\ln 0 = -\infty$

4) $\left.\begin{matrix} \sin(\pm\infty) \\ \cos(\pm\infty) \end{matrix}\right\} = c$ เมื่อ $-1 \le c \le 1$



$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

5) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{ax^{m} + \dots}{bx^{n} + \dots} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{ax^{m}}{bx^{n}} = ?$

ตัดให้เหลือเฉพาะกำลังสูงสุด

จากเศษ , ส่วน

6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{a}{b}\right)^{x} = \begin{cases} +\infty & ; \dfrac{a}{b} > 1 \\ 0 & ; \dfrac{a}{b} < 1 \end{cases}$

6.7 รูปอินดีเทอร์มิเนต

คือ รูปแบบลิมิตที่สรุปไม่ได้

หาคำตอบโดยใช้ กฎโลปิตาล !?

*** กฎโลปิตาล $\Rightarrow$ $\dfrac{\text{Diff บน}}{\text{Diff ล่าง}}$

1) $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ → โลปิตาล

2) $0 \cdot \infty$ → ย้าย 1 ตัวไปหาร → โลปิตาล

3) $\infty - \infty$ → เศษส่วน ⇒ รวมเศษส่วน → โลปิตาล

↘ ไม่ใช่เศษส่วน ⇒ ดึงตัวร่วม ↗

4) 0^0, ∞^0, 1^∞

ให้

$$y = \text{ฟังก์ชัน}$$

$$\ln y = \ln(\text{ฟังก์ชัน})$$

} จัดรูป

$$\lim \ln y = \lim \square$$

} โลปิตาล ***

$$\lim \ln y = ?$$

$$\lim y = e^{?}$$

Evaluate the given limit. จงแสดงวิธีการหาค่าลิมิต

1 (2 คะแนน) $\lim\limits_{x \to 0^+} 3x \ln 5x$

2 (2 คะแนน) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$

3 (5 คะแนน) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + e^x)^{5/x}$

6.8 การวิเคราะห์กราฟ

การวิเคราะห์ฟังก์ชัน

วิเคราะห์ $f(x)$ → หาค่า $x = ?$ ที่ทำให้ $f(x)$ หาค่าไม่ได้

→ หา $\lim_{x \to ?^+} f(x)$, $\lim_{x \to ?^-} f(x)$

→ หา $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

วิเคราะห์ $f'(x)$ → หาจุดแบ่ง

$f'(x) = 0$ | $f'(x)$ หาค่าไม่ได้

→ แบ่งเส้นจำนวน

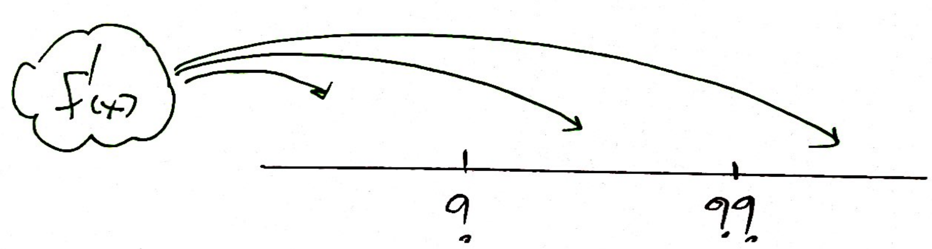
→ วิเคราะห์เครื่องหมาย $f'(x)$ แต่ละช่วง

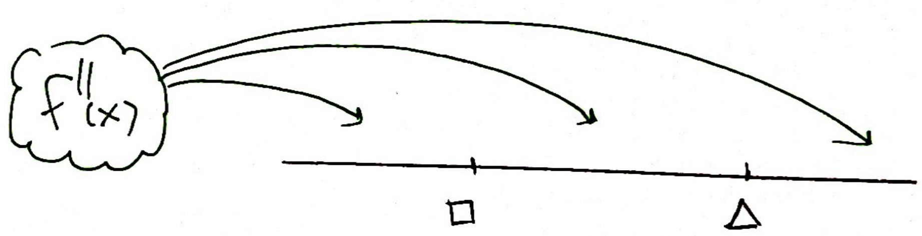
วิเคราะห์ $f''(x)$ → หาจุดแบ่ง

$f''(x) = 0$ $f''(x)$ หาค่าไม่ได้

→ แบ่งเส้นจำนวน

→ วิเคราะห์เครื่องหมาย $f''(x)$ แต่ละช่วง





ข้อสรุป

1) โดเมน → $D_f = \mathbb{R} - \{?\}$

2) เส้นกำกับแนวยืน → $x = ?$

เส้นกำกับแนวนอน → $y = \lim_{x \to +\infty} f(x) \, , \lim_{x \to -\infty} f(x)$

3) ค่าวิกฤต → $x =$ จุดแบ่งช่วง $f'(x) \in D_f$

4) ฟังก์ชันเพิ่ม → $f'(x)$ เป็น $+$

ฟังก์ชันลด → $f'(x)$ เป็น $-$

5) จุดสูงสุดสัมพัทธ์ → ค่าวิกฤต ที่ $+ \mid -$

จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ → ค่าวิกฤต ที่ $- \mid +$

6) ฟังก์ชันเว้าขึ้น → $f''(x)$ เป็น $+$

ฟังก์ชันเว้าลง → $f''(x)$ เป็น $-$

7) จุดเปลี่ยนเว้า → จุดแบ่ง $\in D_f$ ที่ $+ \mid -$, $- \mid +$

การวาดกราฟ

1) วาดเส้นกำกับแนวยืน , เส้นกำกับแนวนอน

2) ลงจุด (x, y) จาก

- lim
- จุดสูงสุด , ต่ำสุด , เปลี่ยนเว้า (ถ้ามีข้อมูล)
- จุด (x, y) อื่นๆ ที่โจทย์กำหนด

3) ลากเส้นกราฟ เชื่อมแต่ละจุด

*** ดูลักษณะเว้าขึ้น หรือ เว้าลง

เว้าขึ้น

เว้าลง

Given the function and its derivatives as follows. กำหนดฟังก์ชันและอนุพันธ์ของฟังก์ชันดังนี้

$$f(x) = (x^2 - 1)x^3, \quad f'(x) = (x^2 - 3)x^2, \quad f''(x) = 2x(2x^2 - 3)$$

1 Find the critical point(s) of f.
จงหาจุดวิกฤติทั้งหมดของ f $x =$ ______________________

2 Find the interval(s) of x where f is increasing.
จงหาช่วงของ x ที่ทำให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ______________________

3 Find the interval(s) of x where f is decreasing.
จงหาช่วงของ x ที่ทำให้ $f(x)$ ที่เป็นฟังก์ชันลด ______________________

4 Find x at the inflection point(s) of f.
จงหาค่า x ณ จุดเปลี่ยนเว้าของ f $x =$ ______________________

5 Find the interval(s) of x where f is concave up.
จงหาช่วงของ x ที่ทำให้ $f(x)$ เว้าขึ้น (โค้งหงาย) ______________________

6 Find the interval(s) of x where f is concave down.
จงหาช่วงของ x ที่ทำให้ $f(x)$ เว้าลง (โค้งคว่ำ) ______________________

Sketch the graph of $f(x)$ satisfying the following properties. จงวาดกราฟของ $f(x)$ ที่มีสมบัติต่อไปนี้

(1) f is continuous on $\mathbb{R}$ except at $x = -5, 5$.
f มีความต่อเนื่องใน $\mathbb{R}$ ยกเว้นที่ $x = -5, 5$

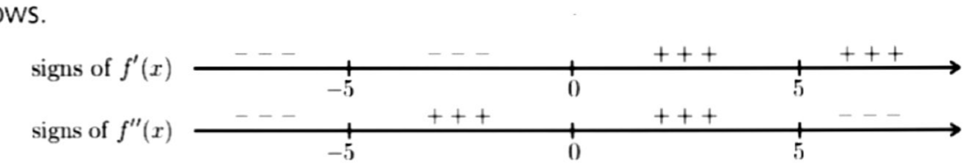
(2) Vertical asymptotes of f are $x = -5$ and $x = 5$.
เส้นกำกับแนวยืนของ f คือ $x = -5$ และ $x = 5$

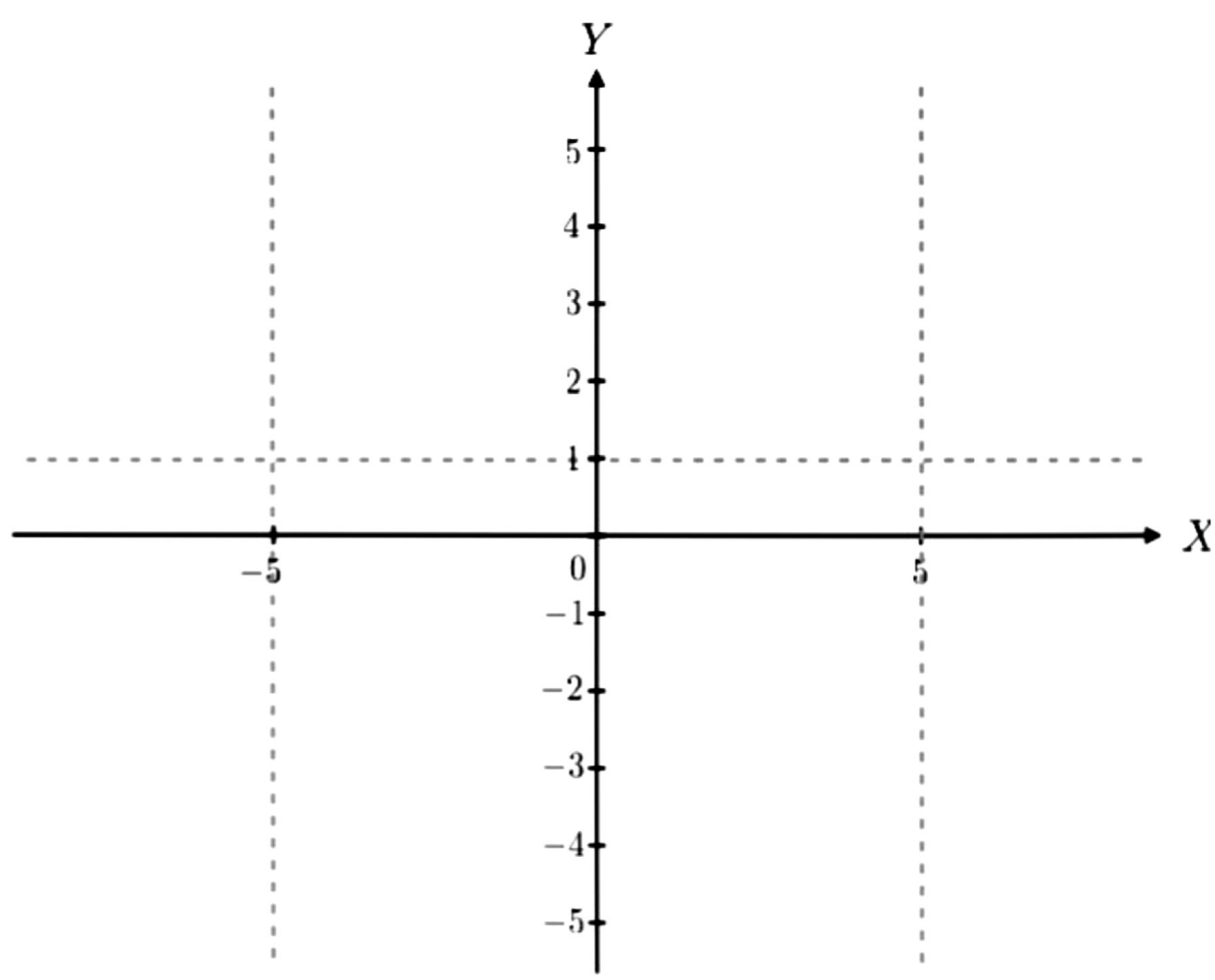
(3) $f(0) = 2$

(4) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

(5) $\lim_{x \to -5^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -5^-} f(x) = -\infty,$
$\lim_{x \to 5^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 5^-} f(x) = +\infty$

(6) The signs of $f'(x)$ and $f''(x)$ are as follows.
กำหนดเครื่องหมายของ $f'(x)$ และ $f''(x)$





๔๑ การวิเคราะห์ค่าสุดขีด

- <u>ค่าสุดขีดสัมพัทธ์</u>

จาก $y = f(x)$

1) หาค่าวิกฤตของ x จาก $f'(x) = 0$
2) หา $f''(x)$
3) แทนค่าวิกฤต ใน $f''(x)$

ถ้า $f''(\text{ค่าวิกฤต}) > 0$ จะเกิดจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

ถ้า $f''(\text{ค่าวิกฤต}) < 0$ จะเกิดจุดสูงสุดสัมพัทธ์

- <u>ค่าสุดขีดสัมบูรณ์</u>

จาก $y = f(x)$ ในช่วง $x \in [a,b]$ ***

1) หาค่าวิกฤตของ x จาก $f'(x) = 0$ $(x \in [a,b])$
2) หา $f(\text{ค่าวิกฤต}) = ?$

$f(a) = ??$

$f(b) = ???$

3) เปรียบเทียบค่าฟังก์ชัน

ค่า f มากที่สุด จะเกิดจุดสูงสุดสัมบูรณ์

ค่า f น้อยที่สุด จะเกิดจุดต่ำสุดสัมบูรณ์

Find the absolute maximum and minimum values of $f(x) = \frac{3}{2}x^4 - 2x^3 + 5$ on the interval $[-2, 2]$.

จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{3}{2}x^4 - 2x^3 + 5$ บนช่วง $[-2, 2]$